Bevis for et teorem om tilstandsstrukturer

Arbeidsnotat

av

Morten Rognes

2007

© Morten Harboe Rognes 2007 07.12.2007

Bevis for et teorem om tilstandsstrukturer

Med en tilstandsstruktur forstås et trippel <I,T,Q> der alle komponentene er ikke-tomme mengder. Er S=<I,T,Q> en tilstandsstruktur kaller vi en funksjon h: I → Q^T for en distribusjonsfunksjon over strukturen. Vi setter u;h(a,t) = Mg(w: wêI & h(w);t = a). Er altså a et element i Q og t et element i Q vil u;h(a,t) være en delmengde av I. A;h er mengden av de diverse u;h(a,t) ettersom <a,t> gjennomløper QxT. Formelt kan begrepet avgrenses ved den følgende definisjon:

A;h = Mg(u;h(a,t): aêQ & têT)

Den minste delmengden Xav Pt(I) som inneholder A;h og som er lukket under komplement med hensyn på I, samt uendelig snitt, betegner vi med U;h. Formelt kan dette begrepet avgrenses slik:

U;h = SN(Mg(X: XêPt(I) & A;h Inkl X & (Ay)(yêX → c(y)êX) &
(Ay)(y Inkl X → SN(y)êX)))

Vi skal nå gi bevis for den følgende sats:

Teorem: Anta <I,T,Q> er en tilstandsstruktur og at h er en distribusjonsfunksjon over <I,T,Q>. Anta Δ Inkl A;h. Sett Δ* = Mg(c(x): xê(A;h - Δ)). Anta SN(ΔUΔ*) <>ø. Da finnes det en entydig bestemt funksjon f der
fêQ^T og (+) Mg(w: wêI & h(w) = f) = SN(ΔUΔ*)

Bevis: Fra forutsetningen SN(ΔUΔ*) <>ø følger det at det finnes w der (1) wêI og dessuten (2) wê SN(ΔUΔ*). Fra det siste kan man slutte: (3) (Ay)(yêΔUΔ* → wêy). Fra (1) kan man slutte at wêDom(h) og derfor at det finnes en funksjon f der vi har
(4) fêQ^T & h(w)=f
man kan nå vise at denne funksjonen f oppfyller kravet (+) i teoremet, med andre ord at
(5) Mg(w: wêI & h(w)=f) = SN(ΔUΔ*)
Vi viser først inklusjonen mot høyre i (+):

A. Anta for vilkårlig w' at (6) w'êI & h(w') =f. Anta videre for vilkårlig y at (7) yêΔUΔ*. Det er da nødvendig å vise at (*) w'êy.
I lys av (7) skjelner vi mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): Vi har at (7.1) yêΔ. Da finnes, siden Δ Inkl A;h, elementer a,t slik at (8) y= u;h(a,t), og der (9) aêQ & têT. Fra (8) og definisjonen av u;h følger:
(10) Mg(w: wêI & h(w);t = a) =y .
Fra (7.1) og (3) følger at (11) wêy. Fra dette og (10) har man så at (12) h(w);t=a. Fra (4) og (6) følger (13) h(w') = h(w), og derfor i lys av (12), at h(w');t= a. Siden w' åpenbart er med i I følger fra dette og (10) at w'êy. Man ser at (*) holder i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): Anta (15) yêΔ*. Da har vi i lys av forutsetningene i satsen at
(16) yêMg(I-x: xê(A;h-Δ)). Dette impliserer at det finnes z som er slik at
(17) y= I-z & zê(A;h - Δ). Fra den andre konjunkten i (17) kan man slutte at zêA;h og derfor

© Morten Harboe Rognes 2007 07.12.2007

at det finnes elementera',t' der a'êQ og t'êT og (18) z = u;h(a',t'). Da følger ved hjelp av definisjonen av u;h at (19) z = Mg(w'': w''êI & h(w'');t' = a'). Fra (15) og (3) følger at wêy. Fra dette og (17) har vi at ¬(wêz). Dette sammen med (19) impliserer, siden wêI, at (20) h(w);t' <> a'. Fra (4) og (6) følger imidlertid at h(w') =h(w'). Fra dette og (20) kan man slutte at (21) h(w');t' <>a'. Siden w'êI følger det at ¬(w'êu;h(a',t')), og derfor at w'ê(I - z) = y. Man ser at (*) holder også i dette tilfellet.

Siden y var et vilkårlig element i ΔUΔ* har vi nå vist at: (Ay)(yêΔUΔ* → w'êy). Dette innebærer at w'ê SN(ΔUΔ*). Men w' var et vilkårlig element i mengden Mg(w: wêI & h(w) = f). Vi har dermed levert et fullstendig bevis for inklusjonen mot høyre i (+).

B. Vi må også gi et bevis for at inklusjonen mot venstre i (+) holder. Anta for reduktio ad absurdum at det finnes noe w0 der vi har:

(22a) h(w0) <> f & w0 êI

(22b) w0 êSN(ΔUΔ*)

Siden w0êI følger det at vi må ha at w0êDom(h) og derfor at det finnes en f;1 der (23) h(w0) = f;1 & f;1êQ^T. Fra (23) og (22a) kan man slutte (24) f;1 <> f. Fra det siste følger det, siden f;1,fêQ^T at det må finnes <a0,t0>êQxT slik at enten

(25a) <t0,a0>êf & ¬(<t0,a0>êf;1) eller

(25b) ¬(<t0,a0>êf) & <t0,a0>êf;1

Siden enten (25a) eller (25b) holder skiller vi mellom to hovedtilfelle:

Hovedtilfelle (i): Anta (25a) <t0,a0>êf & ¬(<t0,a0>êf;1). La oss per definisjon sette: (26) u;0 = u;h(a0,t0). Fra den første konjunkten i (25a) følger (27) f(t0) =a0. Fra dette og (4) følger (28) h(w);t0 = a0. Siden u;h(a0,t0) = Mg(w: wêI &h(w);t0 = a0) følger ved hjelp av (28) at vi må ha:

(29) wêu;h(a0,t0).

Fra den andre konjunkten i (25a) følger (30) ¬(f;1(t0) = a0). Ved hjelp av (23) kan man da slutte (31) ¬(h(w0);t0 = a;0). Siden u;h(a0,t0) = Mg(wêI: h(w);t0 = a0) følger

(32) ¬(w0êu;h(a0,t0))

Nå er det to muligheter når det gjelder u;0. u;0 er enten med Δ eller er ikke med i Δ. Vi skiller derfor mellom to undertilfelle:

Undertilfelle (i.1): (33) u;0êΔ. Fra (22b) følger da (34) (Ay)(yêΔUΔ* → w0êy). Fra dette og (33) følger i så fall w0êu;0 = u;h(a0,t0). Men dette strider mot (32). Dette undertilfellet er derfor utelukket.

Undertilfelle (i.2): u;0ê(A;h - Δ) Da har vi (-u;0)êΔ* og der for i lys av (3) at wê(-u;0). Dette impliserer at wê(I - u;h(a0,t0)). Men da ha vi : ¬(wêu;h(a0,t0)). Dette strider åpenbart mot (29).

I begge disse tilfellene kan man altså utlede en motsigelse. Dette viser at (25a) ikke kan holde og derfor at det første hovedtilfellet er utelukket.

Hovedtilfelle (ii): Anta (25b) ¬(<t0,a0>êf) & <t0,a0>êf;1. Vi setter fremdeles u;0 = u;h(a0,t0). Fra den første konjunkten i (25b) utleder vi at ¬(f(t0) = a0). Ved hjelp av (4) følger herav ¬(h(w);t0 = a0). Dette innebærer

(35) ¬(wêu;h(a0,t0)).

Fra den andre konjunkten i (25b) har vi f;1(t0) = a0. Fra dette og (23) h(w0)(t0) =a0. Men

© Morten Harboe Rognes 2007 07.12.2007

dette og definisjonen av u;h impliserer impliserer at

(36) w0êu;h(a0,t0)

Har vi nå på den ene side at u;0= u;h(a0,t0)êΔ følger ved hjelp av (3) at wêu;h(a0,t0) som strider mot (35). Har vi på den annen side at ¬(u;0êΔ) følger (-u;0)êΔ* og derfor ved hjelp av (22b) at ¬(wêu;0), dvs. at ¬(w0êu;h(a0,t0)). Men dette strider mot (36).

Man ser fra dette at også hovedtilfelle (ii) er utelukket. Dette innebærer at både (25a) og (25) er gale. Men da kan det ikke finnes noe w0som oppfyller både (22a) og (22b). Dette viser at også inklusjonen mot venstre i (+) holder.

Dermed har vi vist at det finnes en funksjon f der vi har:

(37) fêQ^T & Mg(w : wêI & h(w) = f) = SN(Δ U Δ*)

Vi må naturligvis vise at det bare finnes en slik f. Anta at det fantes to. Da ville det finnes f;1, f;2 der:

(38) f;1êQ^T & Mg(w : wêI & h(w) =f;1) = SN(Δ U Δ*) og

(39) f;2êQ^T & Mg(w : wêI & h(w) =f;2) = SN(Δ U Δ*)

Fra (38) og (39) følger: (40) Mg(w : wêI & h(w) =f;1) = Mg(w : wêI & h(w) =f;2)

Nå har man fra (2) at wêSN(ΔUΔ*). Det må derfor i lys av (38)finnes en w0 slik at h(w0) =f;1. Da må vi også ha at w0ê Mg(w : wêI & h(w) =f;2) og derfor at h(w0) =f;2. Det følger at f;1=f;2. Man ser altså at den funksjonen f som påstås å eksistere i satsen er entydig bestemt.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

© Morten Harboe Rognes 2007 07.12.2007